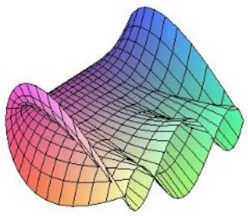


Cálculo Diferencial e Integral:
um kit de sobrevivência
"SageMath"

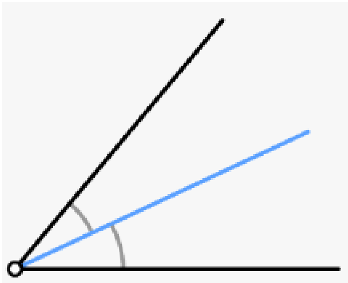
Ester Heloisa Bento
Ivo Eduardo Zanin
Mariana Maronezzi Brezovsky
Vitória Vendramini Gongora
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins.

Soluções do Euclidea

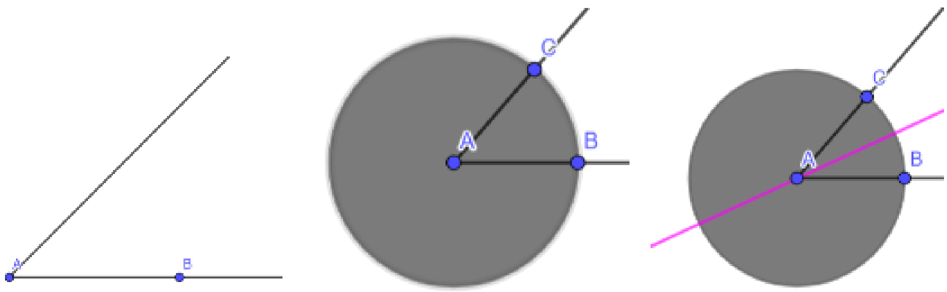
2 Fase Beta β

2.1 Bissetriz

Objetivo: Construa a linha que divide ao meio o ângulo indicado.



Construção estrelas 2L e 4E: Marque um ponto B sobre a semirreta horizontal e trace uma circunferência c de centro em A e raio AB. Marque o ponto de intersecção C entre a circunferência e a outra semirreta. Em seguida, trace a mediatriz de BC.

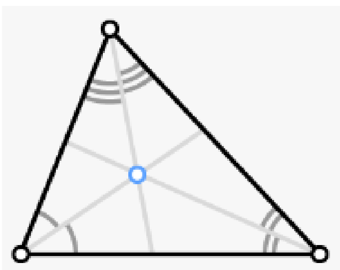


Demonstração: Por construção, temos que AB≡AC pois ambos os segmentos são raio de c. Assim, temos o triângulo isósceles ABC. Além disso, há um teorema que diz que em um triângulo isósceles a mediana relativa à base é também a bissetriz e a altura relativa à base.

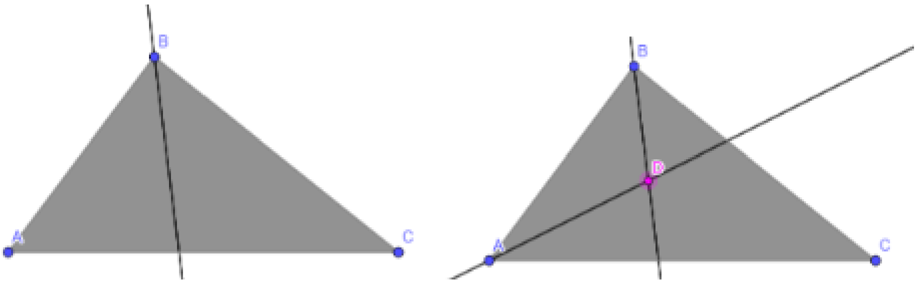
Portanto, ao traçarmos a mediatriz do segmento BC teremos também a bissetriz do ângulo $C\hat{A}B$.

2.2 Interseção de Bissetrizes

Objetivo: Construa o ponto onde as bissetrizes do triângulo se interceptam.

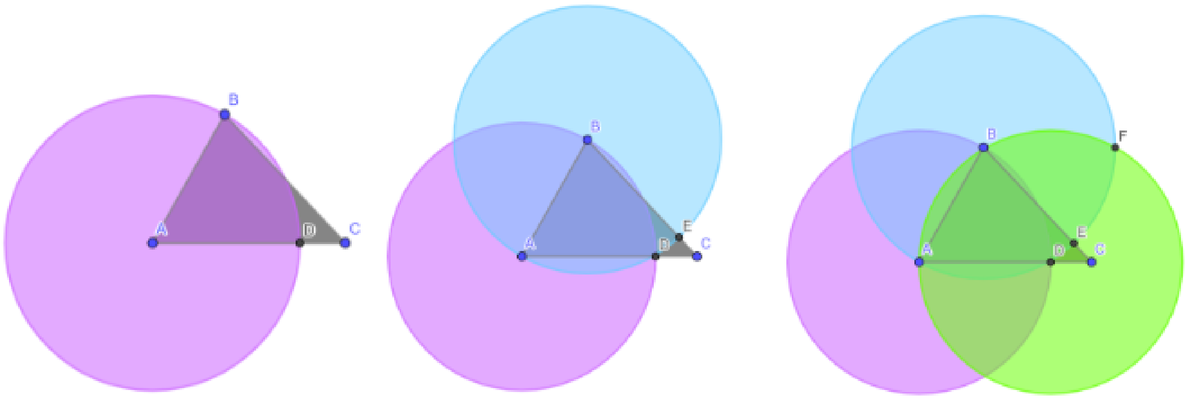


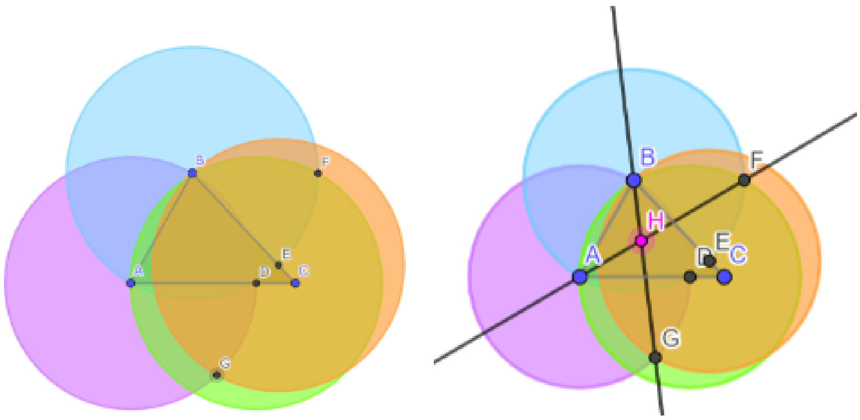
Construção estrela 2L: Dado um triângulo, use a ferramenta e trace as bissetrizes r do ângulo $C\hat{A}B$ e s do ângulo $A\hat{B}C$. Marque o ponto de intersecção D das retas r e s;



Demonstração: De um corolário, temos que as bissetrizes de um triângulo encontram-se num único ponto denominado incentro. Portanto, por construção, o ponto D é o incentro do triângulo ABC.

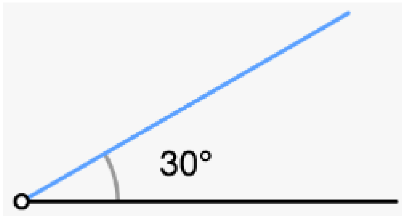
Construção estrela 6E: Trace a circunferência c_1 de centro em A e raio AC e marque o ponto de intersecção D entre c_1 e o segmento AB. Em seguida, trace a circunferência c_2 de centro em C e raio AC e marque o ponto de intersecção E entre c_2 e o segmento BC. Além disso, trace a circunferência c_3 de centro em D e raio DA e marque o ponto de intersecção F entre c_2 e c_3. Agora, trace uma reta r passando pelo ponto A e o ponto F, construa uma circunferência c_4 de centro em E e raio EC e marque o ponto de intersecção G entre c_1 e c_4. Por fim, trace uma reta s passando pelo ponto C e o ponto G e marque o ponto de intersecção H entre r e s;



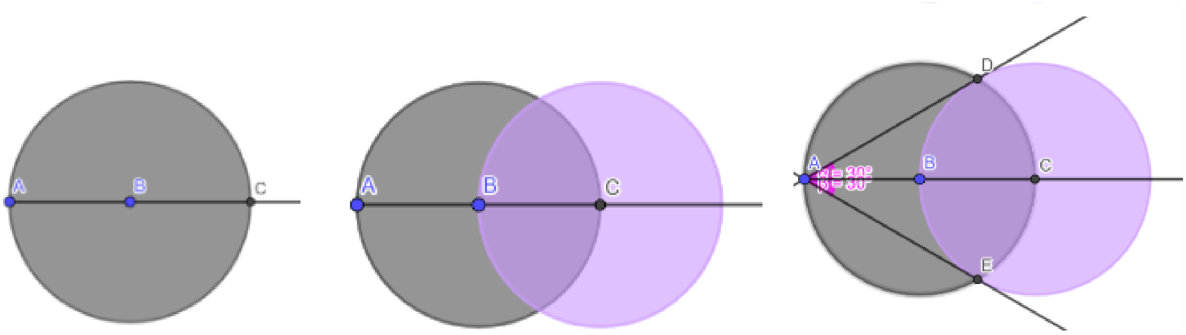


2.3 Ângulo de 30°

Objetivo: Construa um ângulo de 30° com o lado indicado.



Construção estrelas 3L e 3E: Marque um ponto B sobre a semirreta que tem origem em A, construa uma circunferência c_1 de centro B e raio AB e marque o ponto de intersecção C entre a circunferência e a semirreta que tem origem em A. Além disso, construa uma circunferência c_2 de centro C e raio BC e marque os pontos de intersecção D e E entre as circunferências. Por fim, trace uma reta do ponto A ao ponto D.



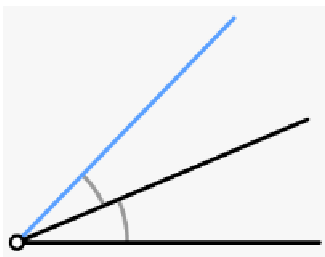
Construção estrela 2V: Trace uma reta do ponto A ao ponto E.

add as construções

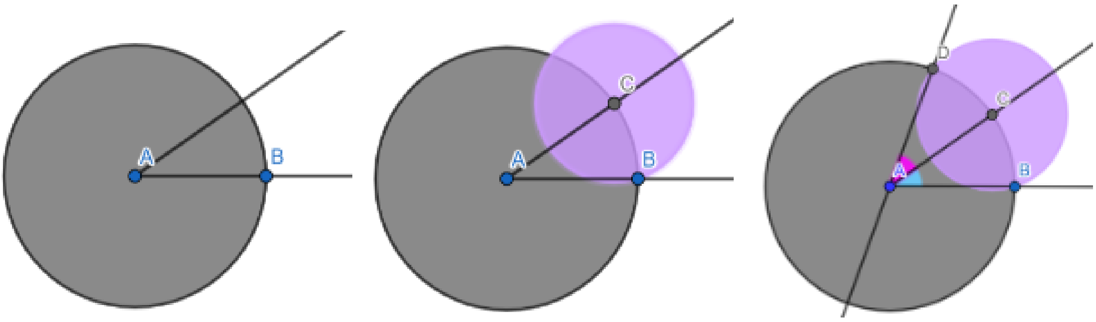
Demonstração: Já mostramos na fase Tutorial 1: Triângulo Equilátero que os ângulos DBC e CBE medem 60. Temos de uma proposição que a medida do ângulo inscrito em um círculo é a metade da medida do arco correspondente. Portanto, temos que os ângulos DAC e CAE medem 30.

2.4 Ângulo Duplo

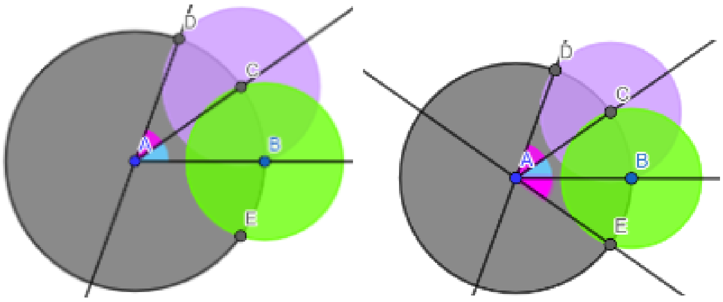
Objetivo: Construa um ângulo igual ao indicado de modo que compartilhem um lado.



Construção estrelas 3L e 3E: Marque um ponto B sobre a semirreta horizontal que tem origem em A, construa uma circunferência c_1 de centro A e raio AB e marque o ponto de intersecção C entre a circunferência e a outra semirreta que tem origem em A. Agora, construa uma circunferência c_2 de centro C e raio BC, marque o ponto de intersecção D entre as circunferências c_1 e c_2 e trace uma reta do ponto A ao ponto D.



Construção estrela 2V: Construa outra circunferência c_3 de centro B e raio BC, marque o ponto de intersecção E entre as circunferências c_1 e c_3 e trace uma reta do ponto A ao ponto E.

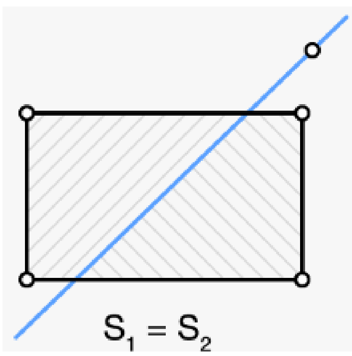


Demonstração: Note que, $BC \equiv CD$ pois ambos os segmentos são raio de c_2 e ainda, $AB \equiv AC \equiv AD$ pois os segmentos são raio de c_1. Assim, os triângulos isósceles ABC e ACD são congruentes pelo caso LLL. Portanto, $D\hat{A}C \equiv C\hat{A}B$.

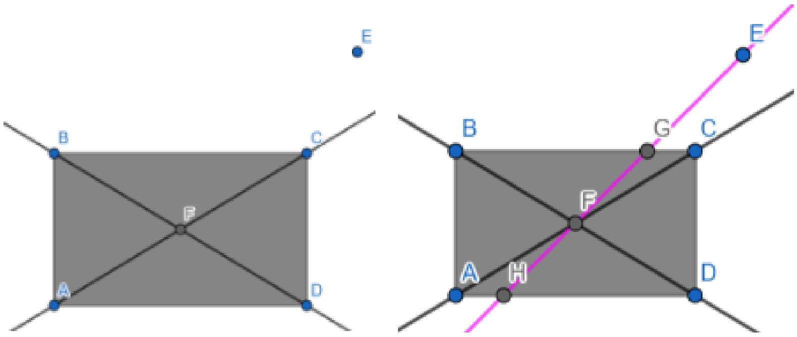
A demonstração para ABC e BAE é análoga.

2.5 Corte o Retângulo

Objetivo: Construa uma linha que passe pelo ponto indicado e corte o retângulo em duas partes de mesma área.



Construção estrelas 3L e 3E: Trace uma reta r do ponto C ao ponto B e uma reta s do ponto A ao ponto D. Marque o ponto de intersecção F entre as retas r e s e trace uma reta do ponto E ao ponto F.



Demonstração: Note que $AC \equiv BD$ pois são lados opostos de um retângulo, $CF \equiv FB$ e $AF \equiv FD$ pois são metade das diagonais do retângulo. Desta forma, $ACF \equiv BDF$.

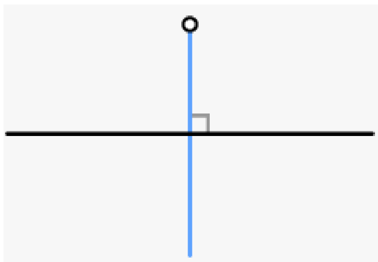
Além disso, note que os ângulos $C\hat{F}G$ e $B\hat{F}H$ são congruentes pois são opostos pelo vértice, os segmentos $CD||AB$ e pelo Teorema de Tales sabemos que DCF e ABF são congruentes e como já vimos $CF \equiv FB$. Assim, os triângulos $CFG \equiv BFH$.

Como $CFG \equiv BFH$ e $ACF \equiv BDF$, temos que $HF \equiv FG$ e $DF \equiv FA$. Além disso, sabemos que GFD e HFA são congruentes pois são opostos pelo vértice. Assim, os triângulos $AFH \equiv GFD$.

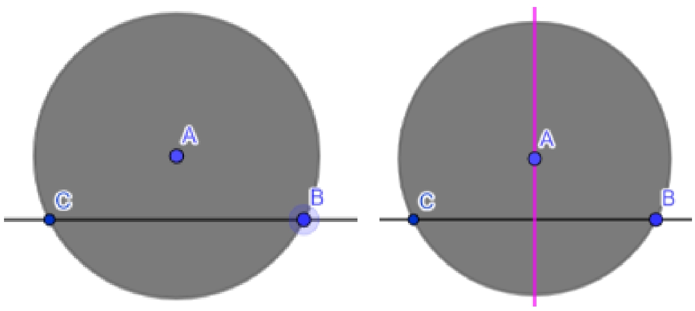
Por um axioma sabemos que se dois triângulos são congruentes, então as regiões triangulares determinadas por eles têm a mesma área. Portanto, a reta h que passe pelo ponto E indicado, corta o retângulo em duas partes de mesma área.

2.6 Trace uma perpendicular

Objetivo: Trace uma perpendicular do ponto para a linha.

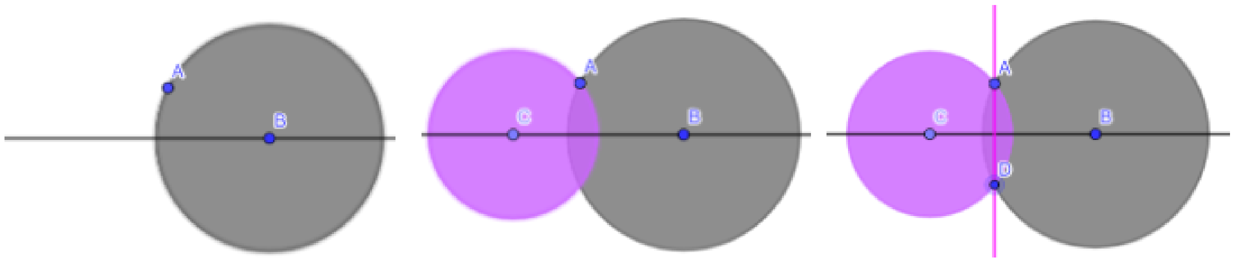


Construção estrelas 2L: Dada uma reta r e o ponto A não pertencente a r,trace uma circunferência centrada em A que intercepte a reta por dois pontos e marque-os sendo os pontos B e C. Utilizando a ferramenta mediatriz, trace a reta mediatriz do segmento CB, essa será perpendicular à r e passará pelo ponto A.



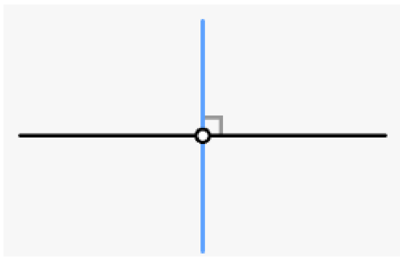
Demonstração: Temos por construção que o triângulo CAB é isósceles. Ao traçar a reta que divide o ângulo oposto da base teremos uma reta que intercepta CB em seu ponto médio e que será perpendicular à CB. Portanto traçamos a reta perpendicular a reta r que passa por A.

Construção estrelas 3E: Dada uma reta r e o ponto A não pertencente a r, marque um ponto B pertencente a r e trace uma circunferência c_1 centrada e B e com raio BA. Tome outro ponto C qualquer pertence a r e trace uma circunferência c_2 centrada em C e com raio CA. Marque o ponto D sendo a interseção de c_1 e c_2 e trace a reta AD, essa será perpendicular à r e passará pelo ponto A.

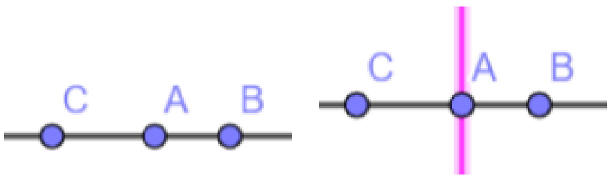


2.7 Eleve uma perpendicular

Objetivo: Eleve uma perpendicular passando pelo ponto na linha.

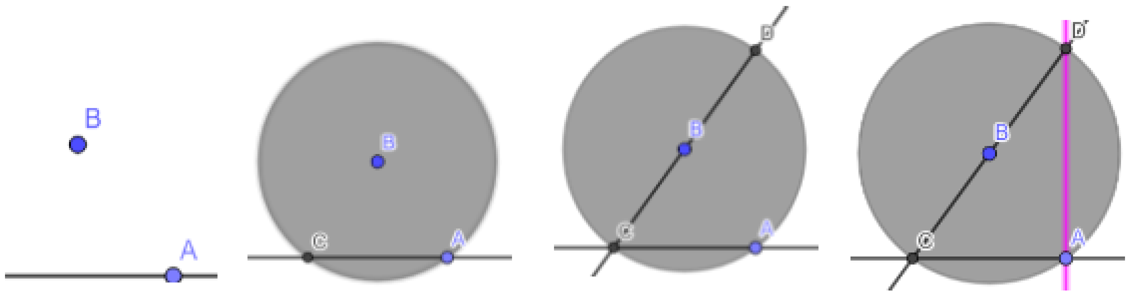


Construção estrelas 1L: Dada uma reta r com o ponto A pertencente a ela, marque dois pontos B e C um de cada lado de A. Utilizando a ferramenta bissetriz trace a bissetriz do ângulo $C\hat{A}B$.



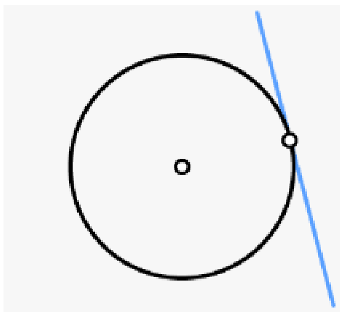
Demonstração: Dada a reta r e um ponto A pertencente a ela, marque o ponto B a direita de A e o ponto C a esquerda de A, assim, o ângulo $B\hat{A}C$ mede 180 e usando a bissetriz desse ângulo ela resultará numa reta que divide $B\hat{A}C$ em duas partes iguais, ou seja, duas partes de 90, formando assim uma reta perpendicular a r.

Construção estrelas 3E: Dado a reta r e o ponto A pertencente a r, marque o ponto B qualquer não pertencente a r. Trace uma circunferência c centrada em B e de raio AB. Trace a reta CB e marque o ponto D sendo a interseção de CB e c. Trace a reta AD.

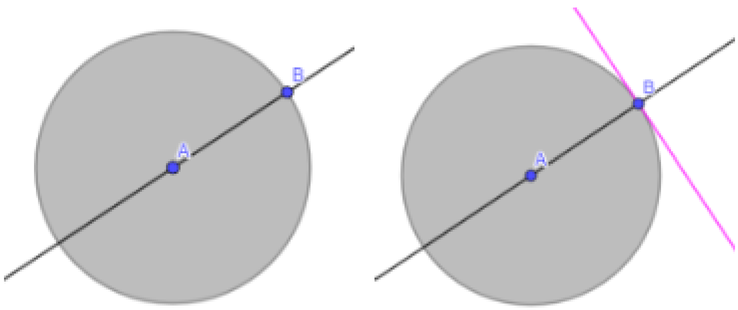


2.8 Tangente ao círculo no Ponto

Objetivo: Construa uma tangente ao círculo no ponto indicado.

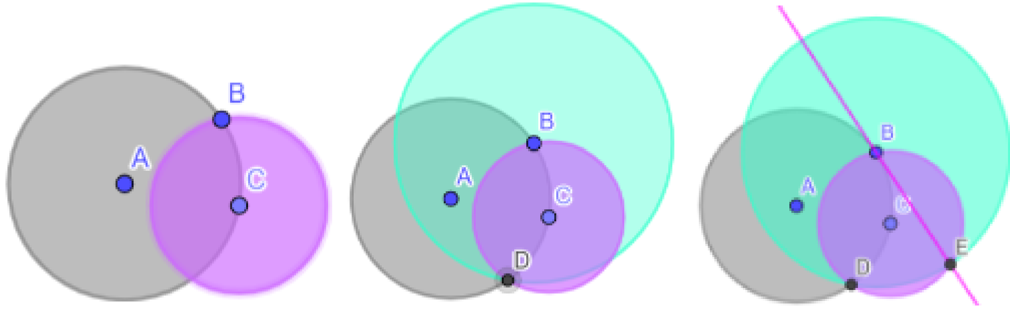


Construção estrelas 2L: Dado uma circunferência c centrada em A e com o ponto B pertencente a c, trace a reta r que contém AB. Utilizando a ferramenta perpendicular, trace a perpendicular a r que passa por B.



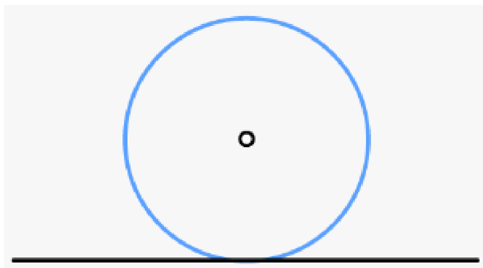
Demonstração: Dada uma circunferência c centrada em A e o ponto B pertencente a c precisamos traçar a tangente de c no ponto B, ou seja, quando traçamos a reta que contém o segmento AB, a tangente de c em B formará um ângulo de 90 com a reta AB, e, por construção quando usamos a ferramenta perpendicular a AB que passa por B encontramos a tangente de c em B.

Construção estrelas 3E: Dado uma circunferência c_1 centrada em A e com o ponto B pertencente a c_1, marque um ponto C pertencente a c_1 e trace a circunferência c_2 centrada em C e de raio CB. Marque o ponto D sendo a interseção de c_1 e c_2 e trace a circunferência c_3 centrada em B e de raio BD. Marque o ponto E senda a interseção de c_2 e c_3 e trace a reta BE.

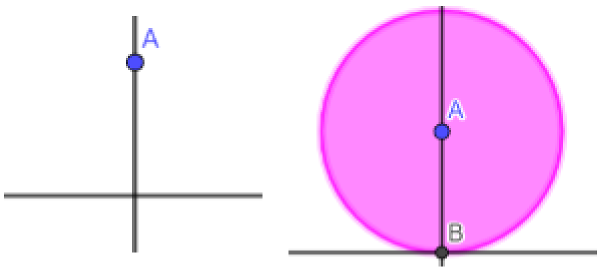


2.9 Círculo Tangente à Linha

Objetivo: Construa um círculo, com o centro indicado, que seja tangente à linha indicada.



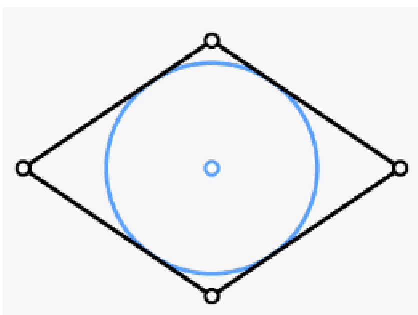
Construção estrelas 2L e 4E: Dada a reta r, e o ponto A não pertencente a reta, utilizando a ferramenta perpendicular trace a reta que é perpendicular a r e passa por A. Que o ponto B sendo a interseção das retas e circunferência centrada em A e de raio AB.



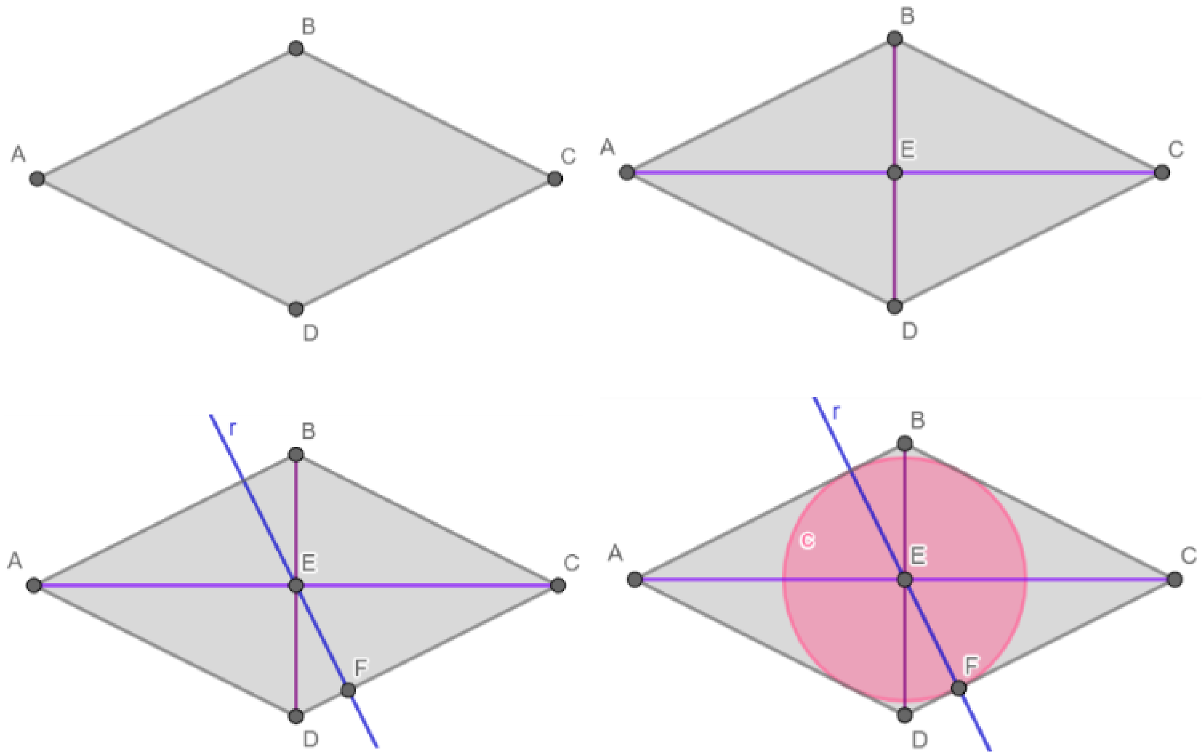
Demonstração: Dada uma reta r, e o ponto A não pertencente à reta, trace a reta s perpendicular a r e que passa pelo ponto A como já visto anteriormente. Assim, o ângulo entre a reta s contém AB e, como s é perpendicular a r, AB também será. Trace a circunferência c centrada em A e de raio AB, o fato de r ser perpendicular a AB implica que r é tangente a c no ponto B.

2.10 Círculo dentro do Losango

Objetivo: Inscreva um círculo dentro do losango.



Construção estrelas 4L e 4E: Trace duas semirretas AC e BD e marque o ponto de intersecção E entre as duas semirretas. Trace a perpendicular r do lado CD que passa por E e marque o ponto de intersecção F entre a reta r e o segmento CD. Por fim, construa uma circunferência c de centro E e raio EF.



Demonstração: Dado o losango $ABCD$, trace as diagonais AC e BD e marque o ponto de intersecção E entre as duas diagonais. Por uma propriedade do losango E será ponto médio das diagonais AC e BD e centro do losango, assim, o ponto E será também centro da circunferência.

Pela fase 2.6, temos a ferramenta para traçar a perpendicular que passa por uma reta e um ponto que não pertence a essa reta. Assim, trace a perpendicular r do lado CD que passa por E e marque o ponto de intersecção F entre a reta r e o segmento CD, pois a circunferência deve tangenciar os lados do losango.

Agora, construa uma circunferência c de centro E e raio EF e desta forma c está inscrita no losango $ABCD$.